16/03/2018
7ο μάθημα

Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-δ.χ E, $\dim_{\mathbb{K}} E = n < \infty$.
Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f: $P_f(t) = |A - tI_n|$, όπου $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ είναι ο πίνακας της f σε τυχαία βάση του E.

Τότε: $P_f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ και: $\deg P_f(t) = n$

Ιδιοτιμές του $f \equiv$ Ρίζες του $P_f(t)$

- Αλγεβρική πολλ/τα της ιδιοτιμής λ = πολλ/τα της λ ως ρίζα του $P_f(t)$
- Γεωμετρική πολλ/τα της ιδιοτιμής $\lambda = \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda)$

Τότε, $\forall$ ιδιοτιμή λ του f: $1 \leq \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) \leq$ αλγεβρική πολλ/τα της λ.

- Αν ο ενδομορφισμός f έχει n το πλήθος διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο f είναι διαγωνοποιήσιμος.
- Έστω ότι ο f είναι διαγωνοποιήσιμος. Τότε υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του E έτσι ώστε: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ διαγώνιος, δηλαδή

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Τότε $P_f(t) = |M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - tI_n| = \begin{vmatrix} \lambda_1 - t & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - t & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n - t \end{vmatrix} = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)\dots(\lambda_n - t)$

Άρα, ιδιοτιμές του $f \equiv$ Ρίζες του $P_f(t) = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ διαγώνια στοιχεία του $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

Θεώρημα

Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E, $\dim_{\mathbb{K}} E = n < \infty$.

Τότε ο f: διαγωνοποιήσιμος $\iff$ α) Οι ιδιοτιμές του f, δηλαδή οι ρίζες του $P_f(t)$ ανήκουν όλες στο σώμα $\mathbb{K}$.

β) Για κάθε ιδιοτιμή λ του f ισχύει ότι $\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) =$ αλγ. πολλ/τα της f.

Απόδειξη

"$\Rightarrow$" Έστω ότι ο f είναι διαγωνοποιήσιμος. Τότε υπάρχει βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ του E στην οποία ο πίνακας $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ είναι διαγώνιος

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}_{k_1 \text{ φορές}} & & \\ & \underbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}_{k_2 \text{ φορές}} & \\ & & \underbrace{\lambda_p \cdots \lambda_p}_{k_p \text{ φορές}} \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση τα στοιχεία $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ είναι ιδιοτιμές του f και αυτές είναι όλες οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του f.

Τότε $P_f(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1} (\lambda_2 - t)^{k_2} \cdots (\lambda_p - t)^{k_p}$

Άρα οι ιδιοτιμές του f είναι: λ_1 με αλγεβρική πολλ/τα k_1

λ_2 — // — k_2

$\vdots$

λ_p — // — k_p

και οι $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ είναι διακεκριμένες.

Προφανώς, $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n = \deg P_f(t)$

Ιδιαίτερα, δείξαμε ότι οι ιδιοτιμές του f ανήκουν όλες στο σώμα $\mathbb{K}$ και άρα ισχύει η συνθήκη α.

Γνωρίζουμε ότι, για κάθε ιδιοτιμή λ_i του f

$$\boxed{1 \le i \le p : 1 \le \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_i) \le k_i}$$

Θέτουμε: $V_1 = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{k_1} \rangle$, $V_2 = \langle \vec{e}_{k_1+1}, \ldots, \vec{e}_{k_2} \rangle, \ldots, V_p = \langle \vec{e}_{k_p+1}, \ldots, \vec{e}_n \rangle$

Τότε: $\vec{x} \in V_1 \Leftrightarrow \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_{k_1}\vec{e}_{k_1}$

Τότε $f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_{k_1}\vec{e}_{k_1}) = x_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x_{k_1} f(\vec{e}_{k_1}) =$

$= x_1\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + x_{k_1}\lambda_1\vec{e}_{k_1} = \lambda_1(x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_{k_1}\vec{e}_{k_1}) = \lambda_1\vec{x}$

Άρα, $f(\vec{x}) = \lambda_1\vec{x} \Rightarrow \vec{x} \in V(\lambda_1)$. Άρα, $V_1 \le V(\lambda_1) \Rightarrow k_1 = \dim_{\mathbb{K}} V_1 \le \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_1)$.

Άρα, $k_1 = \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_1)$.

Παρόμοια, $k_2 = \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_2)$

$\vdots$

$k_p = \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_p)$.

Άρα, για κάθε ιδιοτιμή λ_i του f ισχύει ότι:

$\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_i) = k_i =$ αλγεβρική πολλ/τα της λ_i.

"$\Leftarrow$" Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες (α) και (β).

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του f και έστω

λ_1 με αλγεβρική πολλ/τα k_1

$\vdots$

λ_p με " " k_p.

Τότε $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n = \dim_{\mathbb{K}} E$

Επειδή διακεκριμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες τιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι το άθροισμα των ιδιοχώρων $V(\lambda_1) + \ldots V(\lambda_p)$ είναι ευθύ $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} (V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_p)) =$

$= \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) \overset{(\beta)}{=}$

$= k_1 + \ldots + k_p = n = \dim_{\mathbb{K}} E$

Άρα $E = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_p)$.

Έστω $\mathcal{B}_1$: βάση του $V(\lambda_1)$, $\mathcal{B}_2$: βάση του $V(\lambda_2)$, ..., $\mathcal{B}_p$ βάση του $V(\lambda_p)$.
Τότε γνωρίζουμε ότι $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ βάση του E. Τότε $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ διαγώνιος

$$= \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}\right\} \kappa_1\text{-φορές} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left.\begin{matrix} \lambda_p & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{matrix}\right\} \kappa_p\text{-φορές} \end{pmatrix}.$$

Άρα, ο f: διαγωνοποιήσιμος.

Παραδείγματα

1] Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+ay, y)$

Διακρίνω περιπτώσεις για το a.

- αν $\boxed{a=0}$ τότε $f(x,y) = f(x,y) \Rightarrow f = Id_{\mathbb{R}^2}$
  και προφανώς ο f: διαγωνοποιήσιμος και $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- αν $\boxed{a \neq 0}$. Ο πίνακας του f στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_f(t) = |A - tI_2| = \begin{vmatrix} 1-t & a \\ 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2$$

Άρα, ο f έχει μία ιδιοτιμή την $\lambda=1$ με αλγ. πολλ/τα ίση με 2.

$$V(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 1(x,y)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+ay, y) = (x,y)\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{matrix} x+ax = x \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ay = 0\} \overset{a\neq 0}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$
$$= \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0) \rangle$$

$\dim_{\mathbb{R}} V(1) = 1 \neq 2$, αλγ. πολλ/τα της $\lambda = 1 \Rightarrow f$ δεν είναι διαγωνοποιήσ.

2] $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (-2y-3z,\ x+3y+3z,\ z)$

Επιλέγουμε την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$:
$\mathcal{B} = \{\vec{e_1} = (1,0,0),\ \vec{e_2} = (0,1,0),\ \vec{e_3} = (0,0,1)\}$

Τότε $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f(\vec{e_1}) = (0,1,0)$
$f(\vec{e_2}) = (-2,3,0)$
$f(\vec{e_3}) = (-3,3,1)$

$P_f(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} -t & -2 & -3 \\ 1 & 3-t & 3 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = \ldots = (1-t)(t^2-3t+2)$
$= -(t-1)^2 (t-2)$

Άρα, οι ιδιοτιμές του f είναι $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \ (\text{διπλή}) \\ \lambda_2 = 2 \ (\text{απλή}) \end{cases}$

[Αν λ: ιδιοτιμή του $f: E \to E$, $\dim_{\mathbb{R}} E = n$, τότε στο $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n} \in V(\lambda)$
$\iff (A - \lambda I_n)x = 0$, όπου $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ και $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.]

<u>$\lambda_1 = 1$</u> $V(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 1I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y + 3z = 0$

Γενική λύση του συστήματος: $\begin{pmatrix} -2y-3z \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $y,z \in \mathbb{R}$

Άρα, $V(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -2y-3z\}$
$= \{(-2y-3z,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R}\} = \{(-2y,y,0) + (-3z,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z,y \in \mathbb{R}\}$
$= \{y(-2,1,0) + z(-3,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (-2,1,0), (-3,0,1) \rangle$. Είναι γ.α. Άρα, αποτελεί βάση
το $\mathcal{B}_1 = \{(-2,1,0), (-3,0,1)\}$. $\dim V(1) = 2 =$ πολ/τα στη $\lambda_1 = 1$.

$\lambda_2 = 2$: $V(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 2I_3)X = 0\}$

$$(A - 2I_3)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y - 3z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y$$

Γενική λύση : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ και $y = -x$. Δηλαδή $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$

$V(2) = \{(x,-y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1,0) \rangle$

Άρα, $\{(1,-1,0)\}$ βάση του $V(2)$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, ο f: διαγωνοποιήσιμος και αν $\mathcal{B} = \{(-2,1,0), (-3,0,1), (1,-1,0)\}$ τότε $\mathcal{B}$, βάση του $\mathbb{R}^3$

και

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Πόρισμα

Αν $f: E \to E$ είναι ένας ενδομορφισμός τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. ο f είναι διαγωνοποιήσιμος
2. ο E έχει μία βάση η οποία αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του f.
3. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του f τότε $E = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_p)$
4. a) Οι ιδιοτιμές του f ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$, ~~$\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) =$~~
   b) Για κάθε ιδιοτιμή λ: πολ/τα της $\lambda = \dim V(\lambda)$.

Αλγόριθμος Διαγωνοποίησης Ενδομορφισμού

Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E, $\dim_{\mathbb{K}} E = n < \infty$

Βήματα:

1. Επιλέγουμε μια βάση $\mathcal{B}$ του E
2. Βρίσκουμε τον πίνακα $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ και σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_f(t) = |A - tI_n|$ του f.
3. Βρίσκουμε τις ρίζες του $P_f(t)$ που είναι ιδιοτιμές του f. Αν υπάρχει ιδιοτιμή του f η οποία δεν ανήκει στο σώμα $\mathbb{K}$, τότε σταματάμε και ο f δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.
4. Ελέγχουμε για κάθε ιδιοτιμή λ του f αν $\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) =$ πολ/τα της λ. Αν υπάρχει ιδιοτιμή λ: $\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) \neq$ πολ/τητα της λ, σταματάμε.
5. Έχοντας φτάσει στο βήμα αυτό γνωρίζουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (a), (b) του θεωρήματος και ο f: διαγωνοποιήσιμος.
6. Βρίσκουμε βάσεις των ιδιοχώρων και τις ενώνουμε για να προκύψει μια βάση $\mathcal{C}$ του E και τότε: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$: διαγώνιος.

Για πίνακες

$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow f_A : \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_n \,,\ f_A(X) = A \cdot X.$

Πρόβλημα Διαγωνοποίησης του Πίνακα: Εύρεση αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P: $P^{-1} \cdot A \cdot P$ διαγώνιος.

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης για τον ενδομορφισμό f_A προκύπτει ο αλγόριθμος διαγωνοποίησης του πίνακα A.
κανονική βάση του $\mathbb{K}_n$: $\mathcal{B} = \{E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Τότε $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = A$. Άρα, $|A - tI_n| = P_A(t)$ και τότε θα έχουμε

Αλγόριθμος Διαγωνοποίησης Τετραγωνικού Πίνακα.

① Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$:
$P_A(t) = |A - tI_n|$

② Βρίσκουμε τις ρίζες του $P_A(t)$ που είναι οι ιδιοτιμές του A.

③ Ελέγχουμε αν όλες οι ιδιοτιμές του A ανήκουν στο $\mathbb{K}$. Αν υπάρχει ιδιοτιμή λ του A που δεν ανήκει στο $\mathbb{K}$, σταματάμε: ο A δεν διαγωνοποιείται.

④ Για κάθε ιδιοτιμή λ του A, ελέγχουμε αν: $\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) =$ πολ/τα της λ.
Αν υπάρχει ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{K}$: $\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) \neq$ πολ/τα της λ, σταματάμε: ο A δεν διαγωνοποιείται.

⑤ Σε αυτό το βήμα φτάνουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις στα ③ και ④ και τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

⑥ Βρίσκουμε βάσεις των ιδιοχώρων $V(\lambda) \subseteq \mathbb{K}_n$, για κάθε ιδιοτιμή λ του A, τις ενώνουμε και προκύπτει μια βάση $\mathcal{B} = \{E_1', E_2', \dots, E_n'\}$ του $\mathbb{K}_n$ και θέτοντας $P = (E_1' \, E_2' \dots E_n')$ προκύπτει ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $P^{-1} \cdot A \, P$ διαγώνιος.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$P_A(t) = -t(t+2)(t+3)$$

Ιδιοτιμές του $A = \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$

Όλες οι ιδιοτιμές ανήκουν στο $\mathbb{R}$.

Ο A διαγωνιοποιείται διότι έχει 3 διακεκριμένες ιδιοτιμές.

Για $\boxed{\lambda = 0}$ $V(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ βάση είναι $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Για $\boxed{\lambda = -2}$ $V(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ -//- -//- $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Για $\boxed{\lambda = -3}$ $V(-3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ -//- -//- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P^{-1} A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$